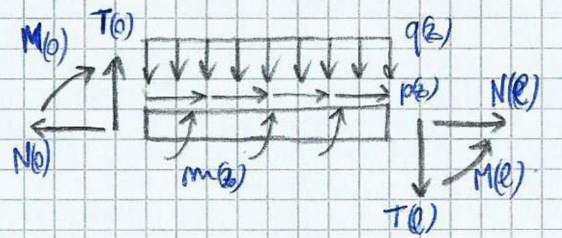
L'identità dei lavori virtuali (ILV)

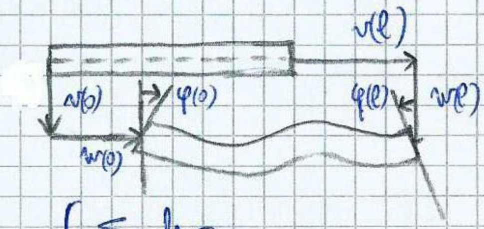
Nel caso dei corpi rigidi la dualità tra statica e cinematica è espressa dalla relazione $B = A^T$. Per i corpi deformabili invece la questione è più complessa. La dualità tra statica (equilibrio) e cinematica (congruenza) è data dall'identità dei lavori virtuali, che afferma: "Il lavoro virtuale esterno compiuto da un sistema di forze su un sistema di spostamenti non relazionato con le forze è uguale al lavoro virtuale interno compiuto dalle sollecitazioni equilibrate con le forze sulle deformazioni congruenti con gli spostamenti". Per esplicitare matematicamente tale concetto consideriamo due sistemi indipendenti

SISTEMA DI FORZE EQUILIBRATO



$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dz} + p(z) = 0 \\ \dfrac{dT}{dz} + q(z) = 0 \\ \dfrac{dM}{dz} + m(z) = T(z) \end{cases}$$

SISTEMA DI SPOSTAMENTI CONGRUENTE



$$\begin{cases} \varepsilon = \dfrac{dw}{dz} \\ \gamma = \dfrac{dv}{dz} + \varphi \\ \chi = \dfrac{d\varphi}{dz} \end{cases}$$

I sistemi sono indipendenti, cioè le deformazioni di destra non sono dovute alle forze di sinistra. Queste ultime compiono un lavoro virtuale δL. Per l'ipotesi di equilibrio si ha:

$$\delta L_{est} = \delta L_{int} \qquad \delta = \text{virtuale}$$

In cui:

$$\delta L_{est} = \int_0^l \left[p(z)\cdot w(z) + q(z)\cdot v(z) + m(z)\cdot \varphi(z)\right] dz + N(l)\cdot w(l) + T(l)\cdot v(l) +$$
$$+ M(l)\cdot \varphi(l) - N(0)\cdot w(0) - T(0)\cdot v(0) - M(0)\cdot \varphi(0)$$

$$\delta L_{int} = \int_0^l \left[N(z)\cdot \varepsilon(z) + T(z)\cdot \gamma(z) + M(z)\cdot \chi(z)\right] dz$$

Dimostriamo l'identità $\delta L_{est} = \delta L_{int}$:

$$\delta L_{est} = \int_0^l (pw + qv + m\varphi)\, dz + N(l)\cdot w(l) + T(l)\cdot v(l) + M(l)\cdot \varphi(l) - N(0)w(0) - T(0)v(0) - M(0)\cdot \varphi(0) =$$

$$= \int_0^l (pw + qv + m\varphi)\, dz + \left[Nw + Tv + M\varphi \right]_0^l$$

Abbiamo tutte funzioni di z : $p(z)$, $w(z)$, ..., $T(z)$, $v(z)$, ecc. Procediamo:

$$\delta L_{est} = \int_0^l (pw + qv + m\varphi)\, dz + \int_0^l \frac{d}{dz}\left(Nw + Tv + M\varphi\right) dz =$$

$$= \int_0^l \left[pw + qv + m\varphi + \frac{dN}{dz} w + N\frac{dw}{dz} + \frac{dT}{dz} v + \frac{dv}{dz} T + \frac{dM}{dz}\varphi + \frac{d\varphi}{dz} M \right] dz =$$

$$= \int_0^l \left[\underbrace{\cancel{w\left(p + \frac{dN}{dz}\right)}}_{=0} + \underbrace{\cancel{v\left(q + \frac{dT}{dz}\right)}}_{=0} + \underbrace{\cancel{\varphi\left(m + \frac{dM}{dz}\right)}}_{=\varphi T} + N\frac{dw}{dz} + T\frac{dv}{dz} + M\frac{d\varphi}{dz} \right] dz =$$

Abbiamo applicato le equazioni di equilibrio:

$$\delta L_{est} = \int_0^l \left[N\frac{dw}{dz} + \left(\varphi + \frac{dv}{dz}\right) T + M\frac{d\varphi}{dz} \right] dz$$

Applicando quelle di congruenza:

$$\delta L_{est} = \int_0^l (N\varepsilon + T\gamma + M\chi)\, dz = \delta L_{int}$$

Come volevasi dimostrare! L'identità dei lavori virtuali vale sia per travi semplici che per sistemi di travi. Ha sia valore teorico (lega statica e cinematica) che pratico (fornisce un metodo per il calcolo degli spostamenti nelle travature).

Dall'ILV discendono due corollari:

- corollario delle forze virtuali: "Condizione necessaria e sufficiente per la congruenza di un sistema di spostamenti e deformazioni è che l'ILV sia soddisfatta per ogni sistema di forze e sollecitazioni equivalenti". Cioè:

  Equilibrio + ILV $\Rightarrow$ Congruenza

- corollario degli spostamenti virtuali: "Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio tra un sistema di forze e sollecitazioni è che l'ILV sia soddisfatta per ogni sistema di spostamenti e deformazioni congruenti". Cioè:

  Congruenza + ILV $\Rightarrow$ Equilibrio

La procedura di calcolo degli spostamenti con l'ILV è la seguente:

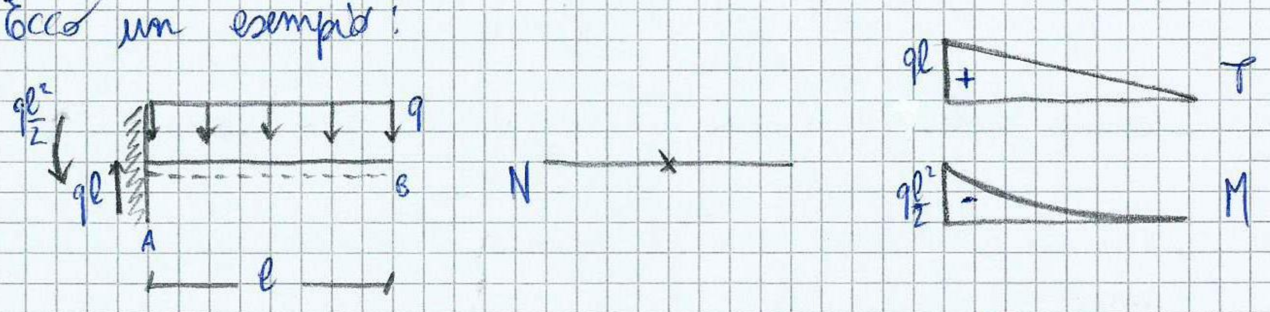
- soluzione della travatura, calcolo di N, T, M e delle deformazioni:

$$\varepsilon = \frac{N}{EA} \qquad \gamma = \frac{T}{GK} \qquad \chi = \frac{M}{EI}$$

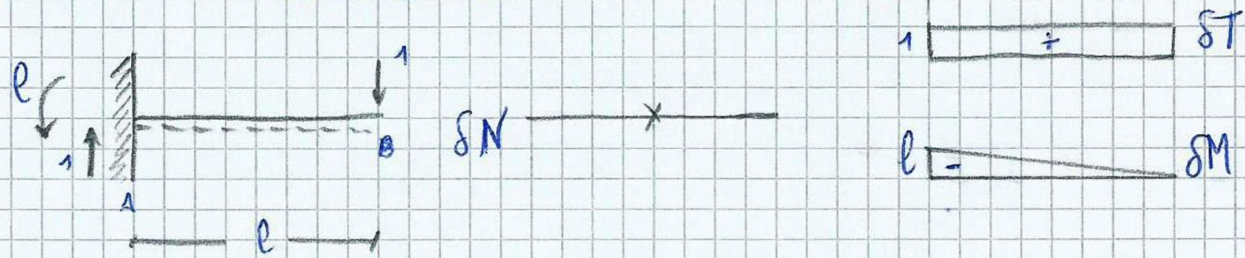
- soluzione di un sistema virtuale senza carichi esterni, con un carico esploratore unitario nella direzione e nel verso dello spostamento richiesto. Si ottengono quindi le tre caratteristiche δN, δT e δM;

- applicazione dell'ILV considerando per il sistema equilibrato δN, δT e δM equilibrate col carico esploratore e per il sistema congruente ε, γ e χ congruenti con gli spostamenti del sistema assegnato.

Ecco un esempio:



trovati N, T, M mettiamo il carico esploratore unitario per definire il sistema virtuale:



Possiamo calcolare lo spostamento v in B:

$\mathcal{L}_{est} = v_B \cdot 1$ $\qquad \mathcal{L}_{int} = \int_0^l \left(\cancel{\frac{N}{EA}\,\delta N} + \frac{T}{GK}\cdot\delta T + \frac{M}{EI}\cdot\delta M\right) dz$

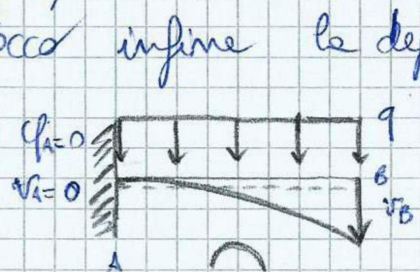
$$\Rightarrow v_B = \frac{1}{GK}\int_0^l (+qz')\cdot 1\, dz' + \frac{1}{EI}\int_0^l \left(-\frac{qz'^2}{2}\right)\cdot(-z')\cdot dz'$$

Esprimiamo N, T, M e δN, δT, δM come equazioni che descrivono i diagrammi delle caratteristiche stesse. Percorriamo la lunghezza della trave in uno dei due versi. In questo caso abbiamo scelto il verso opposto a z, da destra a sinistra, e l'abbiamo indicato con z'. Risolvendo gli integrali:

$$v_B = \frac{1}{GK}\left[q\frac{z'^2}{2}\right]_0^l + \frac{1}{EI}\left[+q\frac{z'^4}{8}\right]_0^l = \frac{ql^4}{8EI} + \frac{ql^2}{2GK}$$

Se $v_B > 0$ lo spostamento ha lo stesso verso del carico esploratore; se $v_B < 0$ ha verso opposto.

Ecco infine la deformata qualitativa:



Nel nostro caso v_B ha lo stesso verso del carico esploratore.

Possiamo ora fare alcune osservazioni conclusive sull'identità dei lavori virtuali applicata a travature per il calcolo dello spostamento v. Dato:

$$v = \int_S \left(\frac{N}{EA} \cdot \delta N + \frac{T}{GK} \cdot \delta T + \frac{M}{EI} \cdot \delta M \right) ds$$

Si hanno le seguenti semplificazioni:

- per la trave snella, $GK \to \infty$:

$$v = \int_S \left(\frac{N}{EA} \delta N + \frac{M}{EI} \delta M \right) ds$$

- per la trave snella e rigida assialmente, $EA \to \infty$, $GK \to \infty$:

$$v = \int_S \left(\frac{M}{EI} \cdot \delta M \right) ds$$

- per la travatura reticolare abbiamo solo sforzo normale e la deformazione ε assiale:

$$v = \int_S \left(\frac{N}{EA} \cdot \delta N \right) ds$$

Dato n_a numero delle aste ed essendo le normali costanti l'integrale diviene una sommatoria:

$$v = \int_S \left(\frac{N}{EA} \cdot \delta N \right) ds = \sum_{i=1}^{n_a} \frac{N_i}{EA} \cdot \delta N_i \cdot l_i \quad , \quad N_i = \text{cost sulle aste}$$